物理と情報のための基礎数学III－演習 （2013年度 第1回目 04.17 ）

①　$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}$のとき，$\boldsymbol{a}$ と垂直なベクトルの公式：$\boldsymbol{b}-\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}$
を使って，$\boldsymbol{a}$ と垂直な単位ベクトル $\boldsymbol{e}$ を求めよ。

②　$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}-1\\2\\4\end{bmatrix}$について，

(1) $\boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{a}$ 上への正射影ベクトルを求めよ。

(2) (1) の正射影ベクトルを用いて，$\boldsymbol{a}$ と垂直な単位ベクトルを1つ求めよ。

③　任意のベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ に対して，次の等式が成り立つことを示せ．

（1）　$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2+\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|^2=2\|\boldsymbol{a}\|^2+2\|\boldsymbol{b}\|^2$

（2）　$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2-\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|^2=4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$

④　$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_3$ について，次のものを求めよ．

（1）　$\|\boldsymbol{a}\|$，$\|\boldsymbol{b}\|$　　（2）　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$　　（3）　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$

⑤　基本ベクトルについて

$$\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3,\qquad \boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1,\qquad \boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2$$

が成り立つことを確かめよ．

物理と情報のための基礎数学III－演習　(2013年度　第2回目　04.24　)

① 平面 $\pi: x-2y+z+3=0$ と平行な平面 α が，点 $\mathbf{A}(3,\ -1,\ 1)$ を通るものとする。

(1) 平面 α の方程式を求めよ。

(2) 平面 α と直線 $\mathbf{L}$: $\dfrac{x-2}{2}=y=\dfrac{z+2}{3}$ との交点 $\mathbf{B}$ の座標を求めよ。

② 2 直線 $\mathbf{L}_1$: $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-1}{4}$，$\mathbf{L}_2$: $\dfrac{x-2}{3}=y+1=z-2$ について，

$\mathbf{L}_1$ に平行で，かつ $\mathbf{L}_2$ を含む平面 α の方程式を求めよ。

③ 次の 3 点を通る平面の方程式を求めよ．

$$(2,1,1),\quad (3,-1,1),\quad (4,1,-1)$$

④ 次のような点と平面の距離を求めよ．

$$(1,1,2),\qquad 3x+y-5z-2=0$$

物理と情報のための基礎数学III－演習　(2013年度　第3回目　05.18　)

①

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$，　$B = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ -2 & -5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ のとき，

(1) $-B = A - 3X$ をみたす行列 X を求めよ。

(2) $2A + 3Y = B$ をみたす行列 Y を求めよ。

②

次の行列の積を求めよ。

(1) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$　　(2) $\begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

③

$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$，$C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ について，

(ⅰ) $(AB)C$ と (ⅱ) $A(BC)$ を計算せよ。

④

(1) $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ に対して，$AX = XA$ ……① をみたす 2 次の正方行列 X を求めよ。

(2) ①をみたす任意の 2 つの行列 X_1 と X_2 について，$X_1X_2 = X_2X_1$ が成り立つことを示せ。

物理と情報のための基礎数学III－演習　(2013年度　第4回目　05.15　)

① 次のように小ブロックに分割して，行列の積を求めよ。

$$\left[\begin{array}{c:cc} -1 & 6 & 5 \\ 0 & -2 & 4 \\ \hdashline 3 & 1 & 2 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc:cc} 2 & 7 & 2 & 0 \\ \hdashline 1 & 3 & 4 & 1 \\ -4 & 0 & -3 & -2 \end{array}\right] \cdots\cdots①$$

② 次の行列の逆行列を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

③ $A \in M(2,2\,;\boldsymbol{R})$ で A の 2 乗 $A^2 = O$ となるものを決定せよ．

④ $A = (a_{ij})$ $(1 \leq i, j \leq n)$ に対して，$\mathrm{Tr}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ とおいて，これを A の**トレース**とよぶ．次を示せ．

（1）　$\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$，　$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$

$(A, B \in M(n, n\,;\boldsymbol{R}))$

（2）　B が正則なら，$\mathrm{Tr}(B^{-1}AB) = \mathrm{Tr}(A)$．

物理と情報のための基礎数学III－演習　(2013年度　第5回目　06.05　)

① 次の行列式の値を求めよ.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -4 & 5 & -6 \\ -7 & -8 & 9 \end{vmatrix}$

② 第 3 行に関する余因子展開を行い $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}$ を求めよ.

③ 次の行列式を計算せよ.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

④ 2 次正方行列 $A = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ について,

$$\det[\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}_2] = \det[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] + \det[\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}_2]$$

が成り立つことを示せ.

物理と情報のための基礎数学III－演習　(2013年度　第6回目　06.12　)

① 次の行列式を計算せよ．

(1) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

② 次の等式を示せ．

$$\begin{vmatrix} x & b & c & 1 \\ a & x & c & 1 \\ a & b & x & 1 \\ a & b & c & 1 \end{vmatrix} = (x-a)(x-b)(x-c)$$

$$\begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix} = 2(a+b)(b+c)(c+a)$$

③ 次のような n 次行列式を計算せよ．

$$\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & a & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a \end{vmatrix}$$

④ 次式を示せ．(ヴァンデルモンドの行列式．)

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ & & \cdots\cdots & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{array}{r} (x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1) \\ \times(x_3-x_2)\cdots(x_n-x_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \times(x_n-x_{n-1}) \end{array}$$

(ヒント：$i \neq j$ について $x_i=x_j$ のとき行列式は 0 になるので (x_i-x_j)で割り切れることがわかる．)

物理と情報のための基礎数学III－演習　(2013年度　第7回目　06.19　)

① 連立方程式 $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-6 \\ 2x_1+x_2+3x_3=-5 \\ x_1-x_2-2x_3=5 \end{cases}$ を，クラメルの公式を用いて解け。

② 連立方程式 $\begin{cases} -x_1+2x_2-x_3=-4 \\ 2x_1+3x_2+x_3=11 \\ x_1-x_2+2x_3=9 \end{cases}$ を，クラメルの公式を用いて解け。

③ 連立方程式 $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-6 \\ 2x_1+x_2+3x_3=-5 \\ x_1-x_2-2x_3=5 \end{cases}$ を，掃き出し法を用いて解け。

④ 連立方程式 $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-6 \\ 2x_1+x_2+3x_3=-5 \\ x_1-x_2-2x_3=5 \end{cases}$ を，掃き出し法を用いて解け。

⑤ $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ の逆行列 A^{-1} を，掃き出し法により求めよ。

物理と情報のための基礎数学III－演習　(2013年度　第8回目　06.26　)

①　次の行列の階数を求めよ。

(1) $X = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$　(2) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$　(3) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 6 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

(4) $C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 6 & 4 & -2 \\ -12 & -8 & 4 \end{bmatrix}$　(5) $Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$

②　次の連立１次方程式を解け。

(1) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 6x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ -12x_1 - 8x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$

③　次の連立１次方程式を解け。

(1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 8 \\ -2x_1 - x_2 + 11x_3 = 18 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 10 \end{cases}$

物理と情報のための基礎数学III－演習　(2013年度　第9回目　07.03　)

①　次のベクトルが１次独立または１次従属か調べよ。

(1) $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$　　(4) $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

②　次のベクトルの組が１次従属になるように m の値を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

③　ベクトル a,b,c,d が１次独立のとき、次のベクトルの組は１次独立または１次従属か調べよ。

(a)　a+b, b+c, c+d, d+a

(b)　a-b, b-c, c-d, d-a

(c)　a+b+c, b+c+d, c+d+a, d+a+b

物理と情報のための基礎数学III－演習　(2013年度　第10回目　07.10　)

①　$\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}3\\5\\-4\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}1\\4\\1\end{bmatrix}$ が線形従属であることを示し，$\boldsymbol{a}_3$ を $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ の線形結合で表せ。

②　$\boldsymbol{u}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{u}_2=\begin{bmatrix}3\\-1\\0\\2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{u}_3=\begin{bmatrix}4\\0\\1\\2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{u}_4=\begin{bmatrix}1\\4\\2\\1\end{bmatrix}$ が，$\boldsymbol{R}^4$ において 1 組の基底となることを示せ。

③　$W=\left\{\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\middle|\, x_1-x_2+3x_3=0\right\}$ が，$\boldsymbol{R}^3$ の部分空間であることを示し，その 1 組の基底を求めよ。

④　$\boldsymbol{R}^3$ において，次の 3 つのベクトルで生成される部分空間 W の 1 組の基底と，W の次元 $\dim W$ を求めよ。

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}0\\2\\-2\end{bmatrix}$$

物理と情報のための基礎数学III－演習　(2013年度　第11回目　07.17　)

①　$\boldsymbol{R}^3$ から $\boldsymbol{R}^2$ への線形写像 F が

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}4\\7\\6\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}5\\9\\8\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$$

のとき,F の表現行列を求めよ。

②　$\boldsymbol{R}^2$ の基底 $B_1=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$,と $\boldsymbol{R}^3$ の基底 $B_2=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ を選んだ時 B_1,B_2

に関する次の 1 次写像の表現行列を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}-x_2\\x_2\\x_1\end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}x_1+x_2\\-x_1\\-2x_1+3x_2\end{pmatrix}$

③　$\boldsymbol{R}^3$ の次の 1 次変換の標準基底に関する表現行列を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}y\\z\\x\end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}-x\\z\\y\end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}x-y+z\\-y\\x-z\end{pmatrix}$

④　$\boldsymbol{R}^2$ において,次の基底 $\{a_1,a_2\}$ から $\{b_1,b_2\}$ への基底変換の行列を求めよ。

(1) $\left\{a_1=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},a_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$　　$\left\{b_1=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix},b_2=\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}\right\}$

(2) $\left\{a_1=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix},a_2=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\right\}$　　$\left\{b_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},b_2=\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}\right\}$

物理と情報のための基礎数学III－演習　(2013年度　第12回目　07.24　)

①　2次正方行列 $A=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。

②　行列 $A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ を，変換行列 P を用いて対角化せよ。

③　次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$，　$(a \neq 0)$

(4) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$