物理と情報のための基礎数学　演習問題 No.1 2013. 4. 17 (Wed)

問 1.　平面上に 1 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ を与えておく。平面上のベクトルの対応 f、g をそれぞれ任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して

$$f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a})\, \boldsymbol{a}$$

$$g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a})\, \boldsymbol{a}$$

によって定義する。

(1) ベクトル $\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、スカラー m に対して

$$f(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = f(\boldsymbol{b}) + f(\boldsymbol{c})$$

$$f(m\boldsymbol{b}) = m\, f(\boldsymbol{b})$$

$$g(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = g(\boldsymbol{b}) + g(\boldsymbol{c})$$

$$g(m\boldsymbol{b}) = m\, g(\boldsymbol{b})$$

が成り立つことを確かめましょう。

(2) $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$、$g(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x}$ となるような、行列 A、B を求めましょう。

問 2.　任意のベクトル $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ に対して、次の等式が成り立つことを示しましょう。

(1) $\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\|^2 + \|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\|^2 = 2\|\boldsymbol{a}\|^2 + 2\|\boldsymbol{b}\|^2$

(2) $\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\|^2 - \|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\|^2 = 4\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$

問 3.　$\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3$ について、次のものを求めましょう。ただし、$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。

(1) $\|\boldsymbol{a}\|$、$\|\boldsymbol{b}\|$

(2) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$

(3) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$

(4) $\boldsymbol{a}$ と垂直な単位ベクトル

(5) $\boldsymbol{b}$ と垂直な単位ベクトル

問 4.　基本ベクトルについて

$$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3、\quad \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1、\quad \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2$$

が成り立つことを確かめましょう。

物理と情報のための基礎数学　演習問題 No.1-1 2013. 4. 17 (Wed)

学籍番号 ____________________________ 氏名 ____________________________

解答は、どう考えたか説明をかきましょう。答えだけ書いても解答ではないよ。

問 1. 平面上に 1 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ を与えておく。平面上のベクトルの対応 f、g をそれぞれ任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して

$$f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a})\, \boldsymbol{a}$$

$$g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a})\, \boldsymbol{a}$$

によって定義する。

(1) ベクトル $\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、スカラー m に対して

$$f(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = f(\boldsymbol{b}) + f(\boldsymbol{c})$$

$$f(m\boldsymbol{b}) = m\, f(\boldsymbol{b})$$

$$g(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = g(\boldsymbol{b}) + g(\boldsymbol{c})$$

$$g(m\boldsymbol{b}) = m\, g(\boldsymbol{b})$$

が成り立つことを確かめましょう。

(2) $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$、$g(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x}$ となるような、行列 A、B を求めましょう。

物理と情報のための基礎数学　演習問題 No.1-2 2013. 4. 14 (Wed)

学籍番号 ______________________ 氏名 ______________________

解答は、どう考えたか説明をかきましょう。答えだけ書いても解答ではないよ。

問 2.　任意のベクトル $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ に対して、次の等式が成り立つことを示しましょう。

(1) $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 + \|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|^2 = 2\|\boldsymbol{a}\|^2 + 2\|\boldsymbol{b}\|^2$

(2) $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 - \|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|^2 = 4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$

物理と情報のための基礎数学　演習問題 No.1-3 2013. 4. 17 (Wed)

学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

解答は、どう考えたか説明をかきましょう。答えだけ書いても解答ではないよ。

問 3.　$\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3$ について、次のものを求めましょう。ただし、$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。

(1) $\|\boldsymbol{a}\|$、$\|\boldsymbol{b}\|$

(2) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$

(3) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$

(4) $\boldsymbol{a}$ と垂直な単位ベクトル

(5) $\boldsymbol{b}$ と垂直な単位ベクトル

物理と情報のための基礎数学　演習問題 No.1-4 2013. 4. 14 (Wed)

学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

解答は、どう考えたか説明をかきましょう。答えだけ書いても解答ではないよ。

問 4.　基本ベクトルについて

$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3$、 $\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1$、 $\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2$

が成り立つことを確かめましょう。

物理と情報のための基礎数学　演習問題 No.2-1 2013. 4. 24 (Wed)

問 1.　次の条件を満たす平面の方程式を求めましょう。ただし、平面の方程式は $ax + by + cz + d = 0$ の形で書くこと。

(1) 2 点 A$(2, 4, 6)$、 B$(5, 3, 1)$ に対して、点 A を通り、直線 AB を法線とする平面

(2) 点 A$(1, -3, 5)$ を通り、平面 $x - 2y + 3z - 1 = 0$ に平行な平面

(3) 3 点 A$(2, 1, 6)$、 B$(2, 3, 2)$、 C$(-1, -2, -3)$ を通る平面

(4) 直線 $\dfrac{x-1}{2} = y - 2 = \dfrac{z-3}{3}$ と点 $(1, -1, 2)$ を含む平面

問 2.

(1) 点 (x_1, y_1, z_1) と平面 $ax + by + cz + d = 0$ の距離 h は

$$h = \frac{\|ax_1 + by_1 + cz_1 + d\|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

となること確かめましょう。

上で確かめたことを用いて以下ような点と平面の距離を求めましょう。

(2) $(1, 1, 2)$、 $3x + y - 5z - 2 = 0$

(3) $(-1, 3, 2)$、 $2x - 4y + z - 1 = 0$

(4) $(3, -2, 1)$、 yz-平面

(5) $(-3, -2, 1)$、 yz-平面

問 3.　次のような、ベクトル $\boldsymbol{n}$ に垂直で点 P を通る平面の方程式を求めましょう。

(1) $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + 3\,\boldsymbol{e}_3$、 P $(4, 2, -1)$

(2) $\boldsymbol{n} = 3\,\boldsymbol{e}_1 + 2\,\boldsymbol{e}_2 - 4\,\boldsymbol{e}_3$、 P $(2, 3, -5)$

(3) $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_1 - 5\,\boldsymbol{e}_3$、 P $(2, 3, 7)$

問 4.　次の条件を満たす直線の方程式を求めましょう。

(1) 2 点 A$(-5, 7, 9)$、 B$(1, 2, 3)$ を通る直線

(2) 点 $(1, -3, 0)$ を通り、直線 $\dfrac{x}{2} = \dfrac{1-y}{3} = \dfrac{z-2}{4}$ に平行な直線

(3) 点 $(-3, 1, 4)$ を通り、直線 $x = 2t$、 $y = -t$、 $z = -2t$ に平行な直線

(4) 点 $(2, -1, 3)$ を通り、直線 $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{3-y}{2}$、 $z = -1$ に平行な直線

物理と情報のための基礎数学　演習問題 No.2-1 2013. 4. 24 (Wed)

学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

解答は、どう考えたか説明をかきましょう。答えだけ書いても解答ではないよ。

問 1. 次の条件を満たす平面の方程式を求めましょう。ただし、平面の方程式は $ax + by + cz + d = 0$ の形で書くこと。

(1) 2 点 A(2, 4, 6)、 B(5, 3, 1) に対して、点 A を通り、直線 AB を法線とする平面

(2) 点 A(1, −3, 5) を通り、平面 $x - 2y + 3z - 1 = 0$ に平行な平面

(3) 3 点 A(2, 1, 6)、 B(2, 3, 2)、 C(−1, −2, −3) を通る平面

(4) 直線 $\dfrac{x-1}{2} = y - 2 = \dfrac{z-3}{3}$ と点 (1, −1, 2) を含む平面

物理と情報のための基礎数学　演習問題 No.2-2 2013. 4. 24 (Wed)

学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

解答は、どう考えたか説明をかきましょう。答えだけ書いても解答ではないよ。

問 2.

(1) 点 (x_1, y_1, z_1) と平面 $ax + by + cz + d = 0$ の距離 h は

$$h = \frac{||ax_1 + by_1 + cz_1 + d||}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

となること確かめましょう。

上で確かめたことを用いて以下ような点と平面の距離を求めましょう。

(2) $(1, 1, 2)$、 $3x + y - 5z - 2 = 0$

(3) $(-1, 3, 2)$、 $2x - 4y + z - 1 = 0$

(4) $(3, -2, 1)$、 yz-平面

(5) $(-3, -2, 1)$、 yz-平面

物理と情報のための基礎数学　演習問題 No.2-3 2013. 4. 24 (Wed)

学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

解答は、どう考えたか説明をかきましょう。答えだけ書いても解答ではないよ。

問 3.　次のような、ベクトル $\boldsymbol{n}$ に垂直で点 P を通る平面の方程式を求めましょう。

(1) $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + 3\,\boldsymbol{e}_3$、　P $(4, 2, -1)$

(2) $\boldsymbol{n} = 3\,\boldsymbol{e}_1 + 2\,\boldsymbol{e}_2 - 4\,\boldsymbol{e}_3$、　P $(2, 3, -5)$

(3) $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_1 - 5\,\boldsymbol{e}_3$、　P $(2, 3, 7)$

物理と情報のための基礎数学　演習問題 No.2-4 2013. 4. 24 (Wed)

学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

解答は、どう考えたか説明をかきましょう。答えだけ書いても解答ではないよ。

問 4. 次の条件を満たす直線の方程式を求めましょう。

(1) 2 点 $A(-5, 7, 9)$、 $B(1, 2, 3)$ を通る直線

(2) 点 $(1, -3, 0)$ を通り、直線 $\dfrac{x}{2} = \dfrac{1-y}{3} = \dfrac{z-2}{4}$ に平行な直線

(3) 点 $(-3, 1, 4)$ を通り、直線 $x = 2t$、 $y = -t$、 $z = -2t$ に平行な直線

(4) 点 $(2, -1, 3)$ を通り、直線 $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{3-y}{2}$、 $z = -1$ に平行な直線

物理と情報のための基礎数学　演習問題 No.3 2013. 5. 8 (Wed)

問 1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$、$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$、$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$、$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ とおくとき、以下の計算をしましょう。

(1) $3A + 4\,{}^tB$

(2) $AB - 2C$

(3) $BA + 3D$

(4) $-2BA + D^2$

問 2. $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ に対して $AB = BA$ となる 3 次の正方行列 B を求めましょう。

問 3. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、$A^2 - (a+d)A + (ad - bc)E = O$ が成り立つことを確かめましょう。

問 4. 正方行列 A、B が

$$A + B = E$$

$$AB = O$$

をみたすとする。このとき次の等式を確かめましょう。

(1) $BA = O$

(2) $A^4 + B^4 = E$

物理と情報のための基礎数学　演習問題 No.3-1 2013. 5. 8 (Wed)

学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

解答は、どう考えたか説明をかきましょう。答えだけ書いても解答ではないよ。

問 1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$、$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$、$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$、$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ とおくとき、以下の計算をしましょう。

(1) $3A + 4\,{}^tB$

(2) $AB - 2C$

(3) $BA + 3D$

(4) $-2BA + D^2$

物理と情報のための基礎数学　演習問題 No.3-2 2013. 5. 8 (Wed)

学籍番号 ____________________________ 氏名 ____________________________

解答は、どう考えたか説明をかきましょう。答えだけ書いても解答ではないよ。

問 2. $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ に対して $AB = BA$ となる 3 次の正方行列 B を求めましょう。

物理と情報のための基礎数学　演習問題 No.3-3 2013. 5. 8 (Wed)

学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

解答は、どう考えたか説明をかきましょう。答えだけ書いても解答ではないよ。

問 3. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、$A^2 - (a+d)\,A + (ad - bc)\,E = O$ が成り立つことを確かめましょう。

物理と情報のための基礎数学　演習問題 No.3-4 2013. 5. 8 (Wed)

学籍番号 ________________________ 氏名 ________________________

解答は、どう考えたか説明をかきましょう。答えだけ書いても解答ではないよ。

問 4. 正方行列 A、B が

$$A + B = E$$

$$AB = O$$

をみたすとする。このとき次の等式を確かめましょう。

(1) $BA = O$

(2) $A^4 + B^4 = E$

物理と情報のための基礎数学　演習問題 No.4 2013. 5. 15 (Wed)

問 1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して、A のべき乗 A^2、A^3、A^4 を求めましょう。

問 2. 次の行列の逆行列を求めましょう。

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ $\qquad (a \neq 0)$

問 3. $A \in M(2,2\,;\,\boldsymbol{R})$ で A の 2 乗 $A^2 = O$ となるもの求めましょう。ただし、$M(2,2\,:\,\boldsymbol{R})$ は 2 行 2 列の実行列全体を表す。

問 4. $A = (a_{ij})$ $(1 \leq i, j \leq n)$ に対して、 [*1]$\mathrm{Tr}\,(A) \equiv \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ とおいて。これを A のトレースと呼ぶことにする。次を確かめましょう。

(1) $\mathrm{Tr}\,(A + B) = \mathrm{Tr}\,(A) + \mathrm{Tr}\,(B)$、 $\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA)$、 ただし $(A, B \in M(n, m\,;\,\boldsymbol{R}))$ である。

(2) B が正則なら、$\mathrm{Tr}\,(B^{-1}AB) = \mathrm{Tr}\,(A)$ である。

問 5. 数学的帰納法を用いて、次のことを確かめましょう。

(1) $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ ならば $A^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}$ $(n = 1, 2, \cdots)$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ならば $A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(n = 1, 2, \cdots)$

(3) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ならば $A^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$ $(n = 1, 2, \cdots)$

問.6 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えましょう。

(1) $P^{-1}AP$ を求めましょう。

(2) $(P^{-1}AP)^n$ を求めましょう。ただし、n は自然数とする。

(3) (2) の結果を用いて、A^n を求めましょう。ただし、n は自然数とする。

[*1] 記号 $A \equiv B$ は A を B と定義するという意味。

物理と情報のための基礎数学　演習問題 No.4-1 2013. 5. 15 (Wed)

学籍番号 ____________________　氏名 ____________________

解答は、どう考えたか説明をかきましょう。答えだけ書いても解答ではないよ。

問 1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して、A のべき乗 A^2、A^3、A^4 を求めましょう。

物理と情報のための基礎数学　演習問題 No.4-2 2013. 5. 15 (Wed)

学籍番号 ______________________　氏名 ______________________

解答は、どう考えたか説明をかきましょう。答えだけ書いても解答ではないよ。

問 2. 次の行列の逆行列を求めましょう。

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$　　$(a \neq 0)$

物理と情報のための基礎数学　演習問題 No.4-3 2013. 5. 15 (Wed)

学籍番号 ____________________________ 氏名 ____________________________

解答は、どう考えたか説明をかきましょう。答えだけ書いても解答ではないよ。

問 3. $A \in M(2,2\,;\ \boldsymbol{R})$ で A の 2 乗 $A^2 = O$ となるもの求めましょう。ただし、$M(2,2\ :\boldsymbol{R})$ は 2 行 2 列の実行列全体を表す。

物理と情報のための基礎数学　演習問題 No.4-4 2013. 5. 15 (Wed)

学籍番号 ______________________　氏名 ______________________

解答は、どう考えたか説明をかきましょう。答えだけ書いても解答ではないよ。

問 4. $A = (a_{ij})$ $(1 \leq i, j \leq n)$ に対して、$\mathrm{Tr}\,(A) \equiv \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ とおいて。これを A のトレースと呼ぶことにする。次を確かめましょう。

(1) $\mathrm{Tr}\,(A+B) = \mathrm{Tr}\,(A) + \mathrm{Tr}\,(B)$、　$\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA)$、　ただし $(A, B \in M(n, m\,;\,\boldsymbol{R}))$ である。

(2) B が正則なら、$\mathrm{Tr}\,(B^{-1}AB) = \mathrm{Tr}\,(A)$ である。

物理と情報のための基礎数学　補足問題 No.4-5 2013. 5. 15 (Wed)

この問題は提出しなくてよい。

問 5. 数学的帰納法を用いて、次のことを確かめましょう。

(1) $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ ならば $A^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}$ $(n = 1, 2, \cdots)$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ならば $A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(n = 1, 2, \cdots)$

(3) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ならば $A^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$ $(n = 1, 2, \cdots)$

物理と情報のための基礎数学　補足問題 No.4-6 2013. 5. 15 (Wed)

この問題は提出しなくてよい。

問.6 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えましょう。

(1) $P^{-1}AP$ を求めましょう。

(2) $(P^{-1}AP)^n$ を求めましょう。ただし、n は自然数とする。

(3) (2) の結果を用いて、A^n を求めましょう。ただし、n は自然数とする。

物理と情報のための基礎数学　演習問題 No.5 2013. 5. 29 (Wed)

問 1.　$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を 2 次の単位行列という。2 次の行列 A、B について、$AB = BA = I$ が成り立つとき、B は A の逆行列であるという。次の行列について、逆行列が存在するかどうか調べましょう。

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$　(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$　(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

問 2.　行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、$ad - bc$ を行列式といい、

$$|A| = ad - bc$$

で表わす。次のことを示しましょう。

(1) 行列 A、B に対して $|AB| = |A||B|$ が成り立つ。

(2) A の逆行列が存在するならば、$|A| \neq 0$ である。

(3) $|A| \neq 0$ ならば、A の逆行列が存在する。

問 3.　数学的帰納法を用いて、次のことを確かめましょう。

(1) $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ ならば $A^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}$ $(n = 1, 2, \cdots)$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ならば $A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(n = 1, 2, \cdots)$

(3) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ならば $A^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$ $(n = 1, 2, \cdots)$

問.4　$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$　$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えましょう。

(1) $P^{-1}AP$ を求めましょう。

(2) $(P^{-1}AP)^n$ を求めましょう。ただし、n は自然数とする。

(3) (2) の結果を用いて、A^n を求めましょう。ただし、n は自然数とする。

物理と情報のための基礎数学　演習問題 No.5 2013. 5. 29 (Wed)

問 1.　$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を 2 次の単位行列という。 2 次の行列 A、B について、$AB = BA = I$ が成り立つとき、B は A の逆行列であるという。次の行列について、逆行列が存在するかどうか調べましょう。

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$　(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$　(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

問 2.　行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、$ad - bc$ を行列式といい、

$$|A| = ad - bc$$

で表わす。次のことを示しましょう。

(1) 行列 A、B に対して $|AB| = |A||B|$ が成り立つ。

(2) A の逆行列が存在するならば、$|A| \neq 0$ である。

(3) $|A| \neq 0$ ならば、A の逆行列が存在する。

問 3.　数学的帰納法を用いて、次のことを確かめましょう。

(1) $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ ならば $A^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}$ $(n = 1, 2, \cdots)$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ならば $A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(n = 1, 2, \cdots)$

(3) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ならば $A^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$ $(n = 1, 2, \cdots)$

問.4　$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$　$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えましょう。

(1) $P^{-1}AP$ を求めましょう。

(2) $(P^{-1}AP)^n$ を求めましょう。ただし、n は自然数とする。

(3) (2) の結果を用いて、A^n を求めましょう。ただし、n は自然数とする。

物理と情報のための基礎数学　演習問題 No.6 2013. 6. 5 (Wed)

問 1. 次の行列式を計算しましょう。

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} a+b & a & a & a \\ a & a+b & a & a \\ a & a & a+b & a \\ a & a & a & a+b \end{vmatrix}$　　(4) $\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$

問 2. 次の等式を確かめましょう。

(1) $\begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix} = 2(b+c)(c+a)(a+b)$　　(2) $\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ b & b & b & a \end{vmatrix} = -(a-b)^4$

(3) $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & ab & ca \\ ab & (a+c)^2 & bc \\ ca & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3$　　(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & 2x & 2y \\ x^2 & y^2 & 3x^2 & 3y^2 \\ x^3 & y^3 & 4x^3 & 4y^3 \end{vmatrix} = -xy(x-y)^4$

(5) $\begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & 1 \\ a^2 & 0 & c^2 & 1 \\ b^2 & c^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$

問 3. 空間内の同一直線上にない 3 点 (x_i, y_i, z_i) $(i = 1, 2, 3)$ を通る平面の方程式が

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

で与えられることを確かめましょう。

問 4. 同一直線上にない 3 点 (x_1, y_1)、(x_2, y_2)、(x_3, y_3) を通る円の方程式は

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ {x_1}^2+{y_1}^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ {x_2}^2+{y_2}^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ {x_3}^2+{y_3}^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

で与えられることを確かめましょう。

物理と情報のための基礎数学　演習問題 No.6-1 2013. 6. 5 (Wed)

学籍番号 ______________________________ 氏名 ______________________________

解答は、どう考えたか説明をかきましょう。答えだけ書いても解答ではないよ。

問 1. 次の行列式を計算しましょう。

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} a+b & a & a & a \\ a & a+b & a & a \\ a & a & a+b & a \\ a & a & a & a+b \end{vmatrix}$　　(4) $\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$

物理と情報のための基礎数学　演習問題 No.6-2 2013. 6. 5 (Wed)

学籍番号 ______________________ 氏名 ______________________

解答は、どう考えたか説明をかきましょう。答えだけ書いても解答ではないよ。

問 2. 次の等式を確かめましょう。

(1) $$\begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix} = 2(b+c)(c+a)(a+b)$$

(2) $$\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ b & b & b & a \end{vmatrix} = -(a-b)^4$$

物理と情報のための基礎数学　演習問題 No.8 2013. 6. 19 (Wed)

問 1. 次の連立 1 次方程式を解きましょう。

(1) $\begin{cases} 2x + y + z &= 3 \\ 3x + 2y + 2z &= 2 \\ 3x - y + 4z &= 7 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} -x + 2y + 3z &= 3 \\ 2x - 3y + 6z &= 1 \\ 5x - 2y + 7z &= 4 \end{cases}$

問 2. 次の連立 1 次方程式は解をもつか。解があれば、それを求めましょう。

⋆(1) $\begin{cases} x + 2y - 3z &= -1 \\ 3x - y + 2z &= k \\ 5x + 3y - 4z &= 2 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 2x + y - 2z &= 10 \\ 3x + 2y + 2z &= 1 \\ 5x + 4y + 3z &= 4 \end{cases}$

問 3. 次の連立 1 次方程式を解きましょう。

⋆(1) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 + 2x_5 &= 1 \\ 3x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 4x_5 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 2x_5 &= 8 \\ 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 5x_5 &= 7 \end{cases}$　⋆(2) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 9x_5 &= 3 \end{cases}$

⋆ 問 4. 次の連立 1 次方程式がただ 1 組の解をもつように k の値を定めて、これを解きましょう。

$$\begin{cases} 2x - y + z &= -1 \\ x + y - z &= 1 \\ 3x + ky + z &= -1 \\ 2x - 2y + (k+3)z &= k - 7 \end{cases}$$

⋆ 問 5. 次の連立 1 次方程式が解をもつかどうか調べましょう。

$$\begin{cases} x + 3y - 2z &= 0 \\ 2x + (k+4)y + z &= 1 \\ x - y - (k+8)z &= 0 \\ 3x + (k+11)y + (k+5)z &= 2 \end{cases}$$

⋆ 問 6. 次の連立 1 次方程式を解きましょう。

$$\begin{cases} (k+1)\,x + y + z &= k - 2 \\ x + (k+1)\,y + z &= -2 \\ x + y + (k+1)\,z &= -2 \\ x + y + z &= -8 \end{cases}$$

問 7. 次の各行列に逆行列があれば、それを求めましょう。

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -6 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$　　★(2) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$　　(4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4-a \\ 1 & 1 & 3 \\ a & 1 & 2+a \end{pmatrix}$

問 8. 次の行列について逆行列を求めましょう。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

問 9. 次の連立 1 次方程式を解きましょう。

(1) $\begin{cases} x + y + 2z + 3w &= 0 \\ x + 2y + 3z - w &= 0 \\ 2x - 2y + z - 2w &= -3 \\ 3x - 2y + 4z + 3w &= -6 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x + 2z + 3w &= 8 \\ 3x + 2y - 2w &= 3 \\ 3x - y + 4z &= 2 \\ 4x + 5y - 2z - 3w &= 5 \end{cases}$

物理と情報のための基礎数学　演習問題 No.8-1 2013. 6. 19 (Wed)

学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

解答は、どう考えたか説明をかきましょう。答えだけ書いても解答ではないよ。

問 1. 次の連立 1 次方程式を解きましょう。

(1) $$\begin{cases} 2x + y + z &= 3 \\ 3x + 2y + 2z &= 2 \\ 3x - y + 4z &= 7 \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} -x + 2y + 3z &= 3 \\ 2x - 3y + 6z &= 1 \\ 5x - 2y + 7z &= 4 \end{cases}$$

物理と情報のための基礎数学　演習問題 No.8-2 2013. 6. 19 (Wed)

学籍番号 ____________________ 氏名 ____________________

解答は、どう考えたか説明をかきましょう。答えだけ書いても解答ではないよ。

問 2. 次の連立 1 次方程式は解をもつか。解があれば、それを求めましょう。

(2) $$\begin{cases} 2x + y - 2z &= 10 \\ 3x + 2y + 2z &= 1 \\ 5x + 4y + 3z &= 4 \end{cases}$$

物理と情報のための基礎数学　演習問題 No.8-3 2013. 6. 19 (Wed)

学籍番号 ______________________　氏名 ______________________

解答は、どう考えたか説明をかきましょう。答えだけ書いても解答ではないよ。

問 4. 次の連立 1 次方程式がただ 1 組の解をもつように k の値を定めて、これを解きましょう。

$$\begin{cases} 2x - y + z & = -1 \\ x + y - z & = 1 \\ 3x + ky + z & = -1 \\ 2x - 2y + (k+3)z & = k - 7 \end{cases}$$

物理と情報のための基礎数学　演習問題 No.8-4 2013. 6. 19 (Wed)

学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

解答は、どう考えたか説明をかきましょう。答えだけ書いても解答ではないよ。

問 8. 次の行列について逆行列を求めましょう。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

問 7. 次の各行列に逆行列があれば、それを求めましょう。

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -6 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

物理と情報のための基礎数学　演習問題 No.9 2013. 6. 26 (Wed)

問 2. 次の連立 1 次方程式は解をもつか。解があれば、それを求めましょう。

$$
{}^{\star}(1)\ \begin{cases} x + 2y - 3z &= -1 \\ 3x - y + 2z &= k \\ 5x + 3y - 4z &= 2 \end{cases}
\qquad
{}^{\star}(3)\ \begin{cases} x + 5y + 4z - 3w &= 3 \\ 3x - y + 2z - 5w &= 2 \\ 2x + 2y + 3z - 4w &= 1 \end{cases}
$$

問 3. 次の連立 1 次方程式を解きましょう。

$$
{}^{\star}(1)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 + 2x_5 &= 1 \\ 3x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 4x_5 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 2x_5 &= 8 \\ 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 5x_5 &= 7 \end{cases}
\qquad
{}^{\star}(2)\ \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 9x_5 &= 3 \end{cases}
$$

* 問 4. 次の連立 1 次方程式がただ 1 組の解をもつように k の値を定めて、これを解きましょう。

$$
\begin{cases} 2x - y + z &= -1 \\ x + y - z &= 1 \\ 3x + ky + z &= -1 \\ 2x - 2y + (k+3)z &= k - 7 \end{cases}
$$

* 問 5. 次の連立 1 次方程式が解をもつかどうか調べましょう。

$$
\begin{cases} x + 3y - 2z &= 0 \\ 2x + (k+4)y + z &= 1 \\ x - y - (k+8)z &= 0 \\ 3x + (k+11)y + (k+5)z &= 2 \end{cases}
$$

* 問 6. 次の連立 1 次方程式を解きましょう。

$$
\begin{cases} (k+1)\,x + y + z &= k - 2 \\ x + (k+1)\,y + z &= -2 \\ x + y + (k+1)\,z &= -2 \\ x + y + z &= -8 \end{cases}
$$

問 11. 次の連立 1 次方程式を解きましょう。

(1) $\begin{cases} 3x + y - 4z &= 5 \\ 2x + y - 3z &= 4 \\ x - z &= 1 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x + 2y - 3z &= 3 \\ x + 3y - 5z &= 4 \\ x + 4y - 7z &= 5 \end{cases}$

問 12. 次の連立 1 次方程式を解きましょう。

(1) $\begin{cases} x - 2z + w &= 1 \\ 2x + y - 3z - w &= 4 \\ 2x - y - 5z + 5w &= 0 \\ 3x + 2y - 4z - 3w &= 7 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x - y + 2w &= 1 \\ x + y - z + 5w &= 2 \\ 2x + 4y - 3z + 13w &= 5 \\ -3x + 11y - 4z + 6w &= 1 \end{cases}$

問 13. 次の行列について階数を求めましょう。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 6 & 6 \\ 3 & 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

問 14. 次の行列について階数を求めましょう。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 7 & -1 & 9 \\ 3 & 5 & 6 & 8 \\ 3 & 4 & -5 & 5 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 3 & -1 & 8 \end{pmatrix}$

物理と情報のための基礎数学　演習問題 No.9-1 2013. 6. 26 (Wed)

学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

解答は、どう考えたか説明をかきましょう。答えだけ書いても解答ではないよ。

問 5. 次の連立 1 次方程式が解をもつかどうか調べましょう。

$$
\begin{cases}
x + 3y - 2z & = 0 \\
2x + (k+4)y + z & = 1 \\
x - y - (k+8)z & = 0 \\
3x + (k+11)y + (k+5)z & = 2
\end{cases}
$$

物理と情報のための基礎数学　演習問題 No.9-2 2013. 6. 26 (Wed)

学籍番号 ____________________ 氏名 ____________________

解答は、どう考えたか説明をかきましょう。答えだけ書いても解答ではないよ。

問 11. 次の連立 1 次方程式を解きましょう。

(1) $$\begin{cases} 3x + y - 4z &= 5 \\ 2x + y - 3z &= 4 \\ x - z &= 1 \end{cases}$$

物理と情報のための基礎数学　演習問題 No.9-3 2013. 6. 26 (Wed)

学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

解答は、どう考えたか説明をかきましょう。答えだけ書いても解答ではないよ。

問 13. 次の行列について階数を求めましょう。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 6 & 6 \\ 3 & 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

物理と情報のための基礎数学　演習問題 No.9-4 2013. 6. 26 (Wed)

学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

解答は、どう考えたか説明をかきましょう。答えだけ書いても解答ではないよ。

問 4. 次の連立 1 次方程式がただ 1 組の解をもつように k の値を定めて、これを解きましょう。

$$\begin{cases} 2x - y + z & = -1 \\ x + y - z & = 1 \\ 3x + ky + z & = -1 \\ 2x - 2y + (k+3)z & = k - 7 \end{cases}$$

物理と情報のための基礎数学　演習問題 No.10 2013. 7. 3 (Wed)

問 1. ベクトル $\boldsymbol{x}$ をベクトル $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ の１次結合としてかき表しましょう。

(1) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$　(2) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

問 2. 次の各組のベクトルについて、１次独立か１次従属かを判定しましょう。

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} 12 \\ 7-k \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 7+k \\ 4 \end{pmatrix}$

問 3. 次の各組のベクトルの組は、それぞれ $\boldsymbol{R}^2$ の基底になるでしょうか。

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

問 4. 次の各組のベクトルの組は、それぞれ $\boldsymbol{R}^3$ の基底になるでしょうか。

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

問 5. 実数 a、b、c が互いに異なる場合、$\boldsymbol{R}^3$ のベクトル

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ b^2 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ c^2 \end{pmatrix}$$

の組は、１次独立であることを示しましょう。

問 6. $\boldsymbol{R}^2$ のベクトル $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えましょう。

(1) $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ が１次独立であるためには、$ad - bc \neq 0$ であることが必要十分条件であることを確かめましょう。 (ちょっと難しい)

(2) $ad - bc \neq 0$ であるとき、$\boldsymbol{R}^2$ の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$ を、$\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$ の１次結合として表しましょう。

ヒント (1) は以下の２つを別々に確かめればよい。

(1') $ad - bc \neq 0$ であるとき、$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ が１次独立であることを確かめましょう。

(1") $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ が１次独立であるとき、$ad - bc \neq 0$ であることを確かめましょう。

物理と情報のための基礎数学　演習問題 No.10-1 2013. 7. 3 (Wed)

学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

解答は、どう考えたか説明をかきましょう。答えだけ書いても解答ではないよ。

問 1. ベクトル $\boldsymbol{x}$ をベクトル $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ の１次結合としてかき表しましょう。

(1) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

物理と情報のための基礎数学　演習問題 No.10-2 2013. 7. 3 (Wed)

学籍番号 ______________________　氏名 ______________________

解答は、どう考えたか説明をかきましょう。答えだけ書いても解答ではないよ。

問 2. 次の各組のベクトルについて、１次独立か１次従属かを判定しましょう。

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

物理と情報のための基礎数学　演習問題 No.10-3 2013. 7. 3 (Wed)

学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

解答は、どう考えたか説明をかきましょう。答えだけ書いても解答ではないよ。

問 4. 次のベクトルの組は $\boldsymbol{R}^3$ の基底になるでしょうか。

(4) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

物理と情報のための基礎数学　演習問題 No.10-4 2013. 7. 3 (Wed)

学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

解答は、どう考えたか説明をかきましょう。答えだけ書いても解答ではないよ。

問 5. 実数 a、b、c が互いに異なる場合、$\boldsymbol{R}^3$ のベクトル

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}、\quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ b^2 \end{pmatrix}、\quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ c^2 \end{pmatrix}$$

の組は、１次独立であることを示しましょう。

物理と情報のための基礎数学　演習問題 No.11 2013. 7. 10 (Wed)

問 1. 次の集合が $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間であるかどうかを調べましょう。

(1) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \middle| \; x = 0 \right\}$　　(2) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \middle| \; x + y + z = 1 \right\}$

問 2. $\boldsymbol{R}^2$ において、次の部分集合は部分空間になるでしょうか。

(1) $x - y = 0$ を満足するベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の全体

(2) $x + y = 1$ を満足するベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の全体

(3) $2x - y = 0$ を満足するベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の全体

(4) $xy \geq 0$ を満足するベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の全体

問 3, W を $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間とする。W に属する任意のベクトル $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$、$\cdots$、$\boldsymbol{a}_r$ および任意の実数 k_1、k_2、$\cdots$、k_r に対して、1 次結合 $k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{a}_r$ も W に属することを示しましょう。

問 4. n 個の実数 a_1、a_2、$\cdots$、a_n がある。$\boldsymbol{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{x}$ で、その成分 x_1、x_2、$\cdots$、x_n が方程式

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$$

を満足するようなもの全体を W とすれば、W は $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間になることを示しましょう。また、この部分空間 W の次元を求めましょう。

問 5. 次の各組のベクトルが生成する $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間の次元を求めましょう。

(1) $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$

問 6. $\boldsymbol{R}^4$ のベクトル $\boldsymbol{x}$ で、その成分 x_1、x_2、x_3、x_4 が連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

を満足するもの全体のつくる部分空間を W とする。

(1) W のベクトル $\boldsymbol{w}_1$、$\boldsymbol{w}_2$ を選んで、$\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}$ が W の基底となるようにしましょう。

(2) $\boldsymbol{R}^4$ の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$、$\boldsymbol{e}_4$ の中から 2 つ $\boldsymbol{e}_i$、$\boldsymbol{e}_j$ を選んで $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j\}$ が $\boldsymbol{R}^4$ の基底となるようにしましょう。

問 7. V、W を $\boldsymbol{K}^n$ の部分空間とする。

(1) V と W に共通に含まれる $\boldsymbol{K}^n$ のベクトル全体の集合を $V \cap W$ で表す。$V \cap W$ も $\boldsymbol{K}^n$ の部分空間であることを示しましょう。

(2) V の元 $\boldsymbol{v}$ と W の元 $\boldsymbol{w}$ との和 $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ として表される $\boldsymbol{K}^n$ のベクトル全体の集合を $V + W$ で表す。$V + W$ も $\boldsymbol{K}^n$ の部分空間であることを示しましょう。

問 8. $\boldsymbol{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{x}$ で、その成分 x_1、x_2、x_3 が

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

を満足するもの全体のつくる部分空間を W_1 とし、

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$

を満足するもの全体のつくる部分空間を W_2 とする。$\boldsymbol{R}^3$ のベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

について、以下の問いに答えましょう。

(1) $\{\boldsymbol{a}\}$ は $W_1 \cap W_2$ の基底であることを示しましょう。

(2) W_i $(i = 1, 2)$ のベクトル $\boldsymbol{w}_i$ を選んで、$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{w}_i\}$ が W_i の基底となるようにしましょう。

(3) このように選んだ $\boldsymbol{w}_1$、$\boldsymbol{w}_2$ について、$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}$ は $\boldsymbol{R}^3$ の基底であることを示しましょう。

物理と情報のための基礎数学　演習問題 No.11-1 2013. 7. 10 (Wed)

学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

解答は、どう考えたか説明をかきましょう。答えだけ書いても解答ではないよ。

問 1. 次の集合が $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間であるかどうかを調べましょう。

(2) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \,\middle|\, x + y + z = 1 \right\}$

物理と情報のための基礎数学　演習問題 No.11-2 2013. 7. 10 (Wed)

学籍番号 ____________________　氏名 ____________________

解答は、どう考えたか説明をかきましょう。答えだけ書いても解答ではないよ。

問 2. $\boldsymbol{R}^2$ において、次の部分集合は部分空間になるでしょうか。

(1) $x - y = 0$ を満足するベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の全体

(3) $2x - y = 0$ を満足するベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の全体

物理と情報のための基礎数学　演習問題 No.11-3 2013. 7. 10 (Wed)

学籍番号 ______________________________ 氏名 ______________________________

解答は、どう考えたか説明をかきましょう。答えだけ書いても解答ではないよ。

問 5. 次の各組のベクトルが生成する $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間の次元を求めましょう。

(1) $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

物理と情報のための基礎数学　演習問題 No.11-4 2013. 7. 10 (Wed)

学籍番号 ____________________　氏名 ____________________

解答は、どう考えたか説明をかきましょう。答えだけ書いても解答ではないよ。

問 8. $\boldsymbol{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{x}$ で、その成分 x_1、x_2、x_3 が

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

を満足するもの全体のつくる部分空間を W_1 とし、

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$

を満足するもの全体のつくる部分空間を W_2 とする。$\boldsymbol{R}^3$ のベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

について、以下の問いに答えましょう。

(1) $\{\boldsymbol{a}\}$ は $W_1 \cap W_2$ の基底であることを示しましょう。

(2) W_i $(i = 1, 2)$ のベクトル $\boldsymbol{w}_i$ を選んで、$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{w}_i\}$ が W_i の基底となるようにしましょう。

(3) このように選んだ $\boldsymbol{w}_1$、$\boldsymbol{w}_2$ について、$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}$ は $\boldsymbol{R}^3$ の基底であることを示しましょう。

物理と情報のための基礎数学　演習問題 No.12 2013. 7. 17 (Wed)

問 1. $f(x) = \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix}$、$g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x$ によって、$f : \boldsymbol{R}^1 \to \boldsymbol{R}^2$、$g : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^1$ を定義する。$f \circ g$、$g \circ f$ を求めましょう。

問 2. 次の線形写像 f に対して、$f = L_A$ となる行列 A を求めましょう。

(1) $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y \\ -2x + 3y \\ 5x - 4y \\ x \end{pmatrix}$　(2) $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y - z \\ 4x + y + 5z \end{pmatrix}$

(3) $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - 3z \\ -2x + 4y + z \\ x - 3y + 2z \end{pmatrix}$　(4) $f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n$

問 3. 次の線形写像の Imf と Ker$f$ を求めましょう。

(1) $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y \\ -2x + 3y \\ 5x - 4y \\ x \end{pmatrix}$　(2) $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y - z \\ 4x + y + 5z \end{pmatrix}$

(3) $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ x - 3z \\ y - 7z \end{pmatrix}$　(4) $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y \\ -2x + 3y \\ 5x - 4y \\ x \end{pmatrix}$　(5) $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

問 4. 次の線形写像の Imf、Ker$f$ の次元を求めましょう。

(1) $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x + 3y + z \\ -x + y - 3z \\ x + z \end{pmatrix}$　(2) $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - y \\ 0 \end{pmatrix}$　(3) $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \\ x + 2y - z + 3w \\ -x + 3y + z - 3w \end{pmatrix}$

問 5. 次の線形写像が同型写像であるか判定しましょう。

(1) $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$、　$ad - bc \neq 0$　(2) $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ -y \\ 2y \end{pmatrix}$　(3) $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - 2y + 3z \\ -2x + 4y - z \\ x + y + 5z \end{pmatrix}$

(4) $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x + 3y - 2z \\ 2x - y + z \\ x + 2y - z \end{pmatrix}$　(5) $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y - 2z \\ -3x + 2y + z \\ y \\ x + z \end{pmatrix}$　(6) $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y - 4z + w \\ -y + z - 3w \\ 2z + w \\ -5w \end{pmatrix}$

問 6. $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ について、どれが線形写像か？

(1) $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}$ ($\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{0}$ でない定ベクトル)

(2) $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}$

(3) $f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x})\, \boldsymbol{a}$

(4) $f(\boldsymbol{x}) = {}^t(x_1{}^2, x_2 + x_3, x_3{}^2)$ $\quad (\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3))$

(5) $f(\boldsymbol{x}) = {}^t(2x_1 - x_2, x_3 + x_1, x_2)$

問 7. $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ は、$\boldsymbol{e}_1 \mapsto {}^t(1, 1, 2)$、$\boldsymbol{e}_2 \mapsto {}^t(0, 1, 2)$、$\boldsymbol{e}_3 \mapsto {}^t(-1, 0, 1)$ であるような線形写像とする。$f = L_A$ となる A を求めましょう。

問 8. 線形写像 $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ が $f(\boldsymbol{e}_i) = \lambda_i \boldsymbol{e}_i$ (λ_i は実数、$i = 1, \cdots, n$) をみたすとする。このとき、$f = L_A$ となる行列 A を求めましょう。

問 9. $f : \boldsymbol{R}^{n+l} \to \boldsymbol{R}^n$ を、${}^t(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+l}) \mapsto {}^t(x_1, \cdots, x_n)$ で定義する。

(1) f は線形写像であることを示し、$f = L_A$ となる A を求めましょう。

(2) $\boldsymbol{R}^n$ の任意の元 ${}^t(x_1, \cdots, x_n)$ を ${}^t(x_1, \cdots, x_n, \overbrace{0, \cdots, 0}^{l})$ と同一視して、$\boldsymbol{R}^{n+l}$ の元とみなすことにすると、$f \circ f = f$ が成り立つことを示しましょう。(このような f を**射影作用素**と呼ぶ。)

問 10. $C^\infty(I)$ を、区間 I 上の無限回微分可能な関数の集合とする。次を示しましょう。

(1) $C^\infty(I)$ は、§2.7 の例 3 で定義された $C(I)$ の部分ベクトル空間である。

(2) $f \in C^\infty(I)$ に対して、$D(f) := f'$ とおけば、$D : C^\infty(I) \to C^\infty(I)$ は線形写像である。ここで、f' は f の導関数である。

(3) $\mathrm{Im}D$、$\mathrm{Ker}D$ を求めましょう。

問 11. P は x についての実係数多項式全体の集合とする。§2.7 の例 1 により、P はベクトル空間である。

$$f(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) := a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1};$$
$$g(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) := a_0 x + a_1 x^2 + \cdots + a_n x^{n+1}$$

によって P から P への写像 f、g を定義する。次を示しましょう。

(1) f、g は P から P への線形写像である。

(2) $f \cdot g = 1_P$、$g \cdot f \neq 1_P$

物理と情報のための基礎数学　演習問題 No.12-1 2013. 7. 17 (Wed)

学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

解答は、どう考えたか説明をかきましょう。答えだけ書いても解答ではないよ。

問 1. $f(x) = \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix}$、$g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x$ によって、$f : \boldsymbol{R}^1 \to \boldsymbol{R}^2$、$g : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^1$ を定義する。$f \circ g$、$g \circ f$ を求めましょう。

物理と情報のための基礎数学　演習問題 No.12-2 2013. 7. 17 (Wed)

学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

解答は、どう考えたか説明をかきましょう。答えだけ書いても解答ではないよ。

問 2. 次の線形写像 f に対して、$f = L_A$ となる行列 A を求めましょう。

(1) $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y \\ -2x + 3y \\ 5x - 4y \\ x \end{pmatrix}$

(4) $f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n$

物理と情報のための基礎数学　演習問題 No.12-3 2013. 7. 17 (Wed)

学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

解答は、どう考えたか説明をかきましょう。答えだけ書いても解答ではないよ。

問 3. 次の線形写像の $\mathrm{Im}f$ と $\mathrm{Ker}f$ を求めましょう。

(1) $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+2y \\ -2x+3y \\ 5x-4y \\ x \end{pmatrix}$

問 4. 次の線形写像の $\mathrm{Im}f$、$\mathrm{Ker}f$ の次元を求めましょう。

(1) $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x+3y+z \\ -x+y-3z \\ x+z \end{pmatrix}$

物理と情報のための基礎数学　演習問題 No.12-4 2013. 7. 17 (Wed)

学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

解答は、どう考えたか説明をかきましょう。答えだけ書いても解答ではないよ。

問 6. $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ について、線形写像かどうか判定しましょう。

(1) $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}$　($\boldsymbol{a}$ は $\mathbf{0}$ でない定ベクトル)

(3) $f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x})\,\boldsymbol{a}$